Тема 3. Алгебра логіки і теоретичні основи синтезу цифрових пристроїв.

Цілі

Результатом вивчення цієї теми мають бути знання про:
- основні поняття булевої алгебри у системах обробки інформації;
- основні закони і тотожності алгебри логіки;
- аналітичне представлення булевих функцій;
- мінімізацію булевих функцій методом Карно-Вейча.

Порядок опрацювання теми

1. Опрацювати теоретичний матеріал (скласти конспект).
2. Дати відповіді на питання для самоконтролю (виконати письмово):
   2.1 Поясніть, на чому базується використання апарату алгебри логіки у комп’ютерній техніці.
   2.2 Поясніть, що називається висловлюванням. Які можуть бути висловлювання з точки зору логіки?
   2.3 Поясніть, що називається таблицею істинності.
   2.4 За допомогою яких операцій можна створити усі можливі логічні функції *n* змінних?
   2.5 Поясніть, що таке ранг функції.
   2.6 Поясніть, чим відрізняється досконала диз’юнктивна нормальна форма логічної функції від диз’юнктивної нормальної форми.
   2.7 Поясніть, що є метою мінімізації логічної функції.
   2.8 Назвіть основні властивості карти Карно.
   2.9 Поясніть відмінності між картами Карно і діаграмами Вейча.
3. Виконати задачі для самостійної підготовки (виконати письмово).

Теоретична частина

Булева алгебра

У практиці інженерної діяльності часто трапляються ситуації, за яких має значення не рівень сигналів, що надходять з відповідних датчиків, а лише наявність чи відсутність таких сигналів. Наприклад, у системах охоронної сигналізації необхідно знати, зачинені чи не зачинені двері або вікна у приміщенні, що охороняється. У системах автоматики часто необхідно знати, чи не перевищує кількість рідини в цистерні заданий рівень, чи не є тиск у котлі нижчим від визначеної межі, чи не перевищує температура у приміщенні задану величину тощо.

Схеми, які дозволяють розв'язувати поставлені завдання, можуть описуватись виразами типу: «лампочка на пульті охоронної сигналізації світиться, якщо всі вікна зачинені (точніше, зачинено перше **і** друге **і** третє **і** … вікно)». Або «лампочка не світиться, якщо хоча б одне вікно відчинене (тобто може бути відчиненим перше **або** друге **або** третє **або** перше **і** друге **або** …)». Такі вирази називаються *логічними*.

Під час проектування таких систем задають відповідний рівень напруги живлення, і наявність чи відсутність її дає можливість одержувати відповіді на поставлені питання. Припускають, що високий рівень напруги – це «1», низький – відповідно, «0». У такому разі наведені вище вирази можуть бути формалізовані: якщо контакти, що фіксують положення вікон, позначити як аргументи x_1, x_2, … , x_n, які можуть набувати лише значення «1» або «0», то напругу на лампочці можемо розглядати як функцію y, яка теж набуває одного з двох аналогічних значень.

Математичний апарат, що оперує з аргументами та функціями, які набувають тільки двох значень – «1» та «0» – називається *двійковою (булевою) алгеброю*, або *алгеброю логіки*. Вона є теоретичною основою побудови ЕОМ і цифрових пристроїв. Такий математичний апарат для розв'язання задач формальної логіки розробив англійський математик XIX ст. Дж. Буль.

Апарат булевої алгебри розповсюджується на об'єкти самої різної природи без відношення до їх суті. Головне, щоб вони характеризувалися двома значеннями або станами: контакт включений або виключений, наявність високого або низького рівня електричної напруги, виконання або невиконання деякої умови роботи тощо.

Використання апарату алгебри логіки у комп'ютерній техніці базується на тому, що цифрові елементи характеризуються двома станами і завдяки цьому можуть бути описані булевими функціями. Стандарт ДСТУ 2533-94 «Арифметичні і логічні операції. Терміни і визначення» конкретизував основні поняття булевої алгебри у системах обробки інформації.

Базою алгебри логіки є поняття про висловлювання (логічний аргумент), істинність і помилковість висловлювання, а також поняття про зв'язки між висловлюваннями. *Висловлювання* - це будь-яке речення, яке являє собою таке твердження, про яке можна судити, істинне воно або помилкове. Значення висловлювання може змінюватися зі зміною обставин, тому висловлювання змінює оцінку своєї істинності. Наприклад, висловлювання «сьогодні вівторок» є істинним у вівторок і помилковим у середу.

З точки зору логіки висловлювання можуть бути:
- постійно істинними (математично їх беруть такими, що дорівнюють 1);
- постійно помилковими (математично їх беруть такими, що дорівнюють 0);
- істинними або помилковими залежно від певних умов, тобто набувати значення 1 або 0 навперемінно.

Різні комбінації значень вхідних змінних у логічних функціях називають *наборами*. Функція є цілком заданою, якщо вказані її значення для всіх наборів значень вхідних змінних. Якщо задати кожному набору значення функції, яке дорівнює 0 або 1, можна дістати табличне завдання певної функції, що називають *таблицею істинності* або *таблицею відповідності*.

Усі можливі логічні функції n змінних можна створити за допомогою трьох основних операцій:
- *логічне заперечення* (інверсія, операція НІ) – це такий зв'язок між аргументом x та функцією y, за якого y істинна тоді і тільки тоді, коли значення x помилкове, і навпаки;
- *логічне додавання* (диз'юнкція, операція АБО) декількох змінних – це така функція, яка помилкова тоді і тільки тоді, коли одночасно помилкові всі змінні, що додаються.
- *логічне множення* (кон'юнкція, операція І) декількох змінних – це така функція, яка істинна тоді і тільки тоді, коли одночасно істинні всі логічні змінні.

Основні закони і тотожності алгебри логіки. Для булевих операцій заперечення, диз'юнкції і кон'юнкції справедливі наступні закони, властивості і тотожності:

1. Закони нульової множини:

   $0 \cdot a = 0,$
   $0 + a = a,$
   $0 \cdot adc \ldots z = 0.$

2. Закони універсальної множини:

   $1 \cdot a = a,$
   $1 + a = 1,$
   $1 + a + b + \ldots + z = 1.$

3. Закони ідемпотентності (повторення, тавтології):

   $aa \ldots a = a,$
   $a + a + \ldots + a = a.$

4. Закони подвійної інверсії:

   $\bar{\bar{a}} = a.$

5. Закони доповняльності:

   а) логічне протиріччя:

   $a\bar{a} = 0,$

   б) закон виключеного третього:

$a + \bar{a} = 1.$

6. Комутативний (переставний) закон:

   $ab = ba,$

   $a+b = b+a.$

7. Асоціативні (сполучні) закони:

   $a(bc) = (ab)c = abc,$

   $a+(b+c) = (a+b)+c = a+b+c.$

8. Дистрибутивні (розподільні) закони:

   $a(b+c) = ab+ac,$

   $a+bc = (a+b)(a+c).$

9. Закони поглинання:

   $a(a+b) = a,$

   $a(a+b)(a+c)\ldots(a+w) = a,$

   $a+ab = a,$

   $a+ab+ac+\ldots+aw = a,$

   $a(\bar{a}+b) = ab,$

   $a+\bar{a}b = a+b.$

10. Закони склеювання (поширення):

   $ab + a\bar{b} = a,$

   $(a + b)\left(a + \bar{b}\right) = a.$

11. Закони узагальненого склеювання:

   $ab + \bar{a}c + bc = ab + \bar{a}c,$

   $(a + b)(\bar{a} + c)(b + c) = (a + b)(\bar{a} + c),$

   $(a + b)(\bar{a} + c) = ac + \bar{a}b.$

12. Закони де Моргана (закони інверсії):

   а) для двох змінних:

   $\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b},$

   $\overline{a + b} = \bar{a}\bar{b},$

   б) для n змінних:

   $\overline{abc \ldots w} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \ldots + \bar{w},$

   $\overline{a + b + c \ldots + w} = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\ldots\bar{w}.$

Назва, позначення і значення всіх шістнадцяти булевих функцій для двозначної системи двох змінних наведено у таблиці 1.20.

Таблиця 1.20 – Значення булевих функцій

№ пор.	Значення булевих функцій залежно від аргументів x та y					Позначення функції	Назва функції	Назва або позначення схеми логічного елемента
	x	0	0	1	1			
	y	0	1	0	1			
1	$F_0(x, y)$	0	0	0	0	0	Константа нуль	Генератор нуля
2	$F_1(x, y)$	0	0	0	1	$x \wedge y$ xy	Кон'юнкція, логічне множення, І	Кон'юнктор, І, &
3	$F_2(x, y)$	0	0	1	0	$x \Delta y$	Заборона за x, заперечення імплікації	Схема заборони
4	$F_3(x, y)$	0	0	1	1	x	Змінна x	Повторювач x
5	$F_4(x, y)$	0	1	0	0	$y \Delta x$	Заборона за y, заперечення імплікації	Схема заборони
6	$F_5(x, y)$	0	1	0	1	y	Змінна y	Повторювач y
7	$F_6(x, y)$	0	1	1	0	$x \oplus y$	Сума за модулем 2, логічна нерівнозначність	Додавання за модулем 2, M2
8	$F_7(x, y)$	0	1	1	1	$x \vee y$ $x + y$	Диз'юнкція, логічне додавання, АБО	Диз'юнктор, АБО
9	$F_8(x, y)$	1	0	0	0	$x \downarrow y$ $\overline{x \vee y}$	Стрілка Пірса, заперечення диз'юнкції	Елемент Пірса, АБО – НЕ
10	$F_9(x, y)$	1	0	0	1	$x \equiv y$	Еквівалентність	Рівнозначність
11	$F_{10}(x, y)$	1	0	1	0	y	Заперечення, інверсія y	Інвертор НЕ
12	$F_{11}(x, y)$	1	0	1	1	$y \to x$	Імплікація від y до x	Елемент імплікації
13	$F_{12}(x, y)$	1	1	0	0	$- x$	Заперечення, інверсія x	Інвертор НЕ
14	$F_{13}(x, y)$	1	1	0	1	$x \to y$	Імплікація від x до y	Елемент імплікації
15	$F_{14}(x, y)$	1	1	1	0	x/y	Штрих Шеффера, заперечення кон'юнкції	Елемент Шеффера, І – НЕ
16	$F_{15}(x, y)$	1	1	1	1	1	Константа 1	Генератор одиниці

Аналітичне представлення булевих функцій

Для опису функцій алгебри логіки використовують різні способи. Основними з них є опис функцій у словесній формі, у вигляді таблиць істинності, алгебраїчних виразів, послідовностей десяткових чисел, а також кубічних комплексів.

Розглянемо опис функцій алгебри логіки у вигляді алгебраїчного виразу.

Алгебра логіки дає змогу створювати складні функції, аргументи яких є функціями інших двійкових аргументів. За допомогою *суперпозицій*, тобто підстановки у логічні формули замість змінних деяких інших булевих виразів, можна отримати більш складні функції будь-якої кількості змінних, наприклад:

$$y = x_1 \vee x_2; \; x_1 = z_1 z_2; \; x_2 = z_3 \vee z_4, \text{ тоді } y = z_1 z_2 \vee z_3 \vee z_4$$

Багаторазове використання принципу суперпозиції дає можливість дістати функції бажаного числа аргументів.

Елементарна кон'юнкція утворюється кон'юнкцією скінченної множини логічних змінних та їх заперечень. Наприклад, $P(x, y, z) = xy\bar{z}$.

Елементарна диз'юнкція утворюється диз'юнкцією скінченної множини логічних змінних та їх заперечень. Наприклад, $P(x, y, z) = x + y + \bar{z}$.

Кількість змінних в елементарній кон'юнкції (диз'юнкції) називається її *довжиною* і визначає її *ранг.* Наприклад, $P(x, y, z, w) = x + y + \bar{z} + w$ є диз'юнкцією четвертого рангу.

Розроблені універсальні (канонічні) форми представлення булевих функцій, які дають можливість отримати аналітичну форму довільної функції безпосередньо із таблиці істинності. Ця форма у подальшому може бути мінімізована або спрощена. Найбільш широке розповсюдження отримали досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ) і досконала кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ). Для отримання цих форм вводяться поняття мінтермів (конституента 1) і макстермів (конституента 0).

Мінтерм – це функція, що набуває одиничного значення тільки при одному з усіх можливих наборів аргументів.

Макстерм – це функція, що набуває нульового значення тільки при одному з усіх можливих наборів аргументів.

Мінтерм алгебраїчно є кон'юнкцією аргументів, а макстерм – диз'юнкцією аргументів.

Якщо використовують двійкову систему числення і число наборів аргументів *n*, то число мінтермів або макстермів $N = 2^n$.

Диз'юнкцію будь-якого числа елементарних кон'юнкцій називають *диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ).*

Наприклад, $a + bc + \bar{a}bc + a\bar{b}\bar{c}$.

Кон'юнкцію будь-якого числа елементарних диз'юнкцій називають *кон'юнктивною нормальною формою (КНФ).*

Наприклад, $a(a + b)(\bar{b} + c)(\bar{a} + b + \bar{c})$.

Нормальні форми логічних функцій називають *канонічними*. Логічну функцію, задану будь-яким аналітичним виразом, можна безпосередньо перетворити на нормальну диз'юнктивну (або кон'юнктивну) форму.

Якщо до складу логічної формули належать набори елементарних кон'юнкцій однакового рангу, пов'язані диз'юнкцією, то таку форму подання логічної функції називають *досконалою диз'юнктивною нормальною формою (ДДНФ)*. Правила утворення ДДНФ функції *n* аргументів такі:

1. За кожним набором двійкових змінних, за яких функція набуває значення 1, скласти елементарні кон'юнкції (мінтерми).
2. В елементарну кон'юнкцію записати неінвертованими змінні, що задані одиницею в таблиці істинності, а інвертованими – ті змінні, які в таблиці істинності задані нулем. Здобутий результат називають конституентами одиниці.
3. Елементарні кон'юнкції об'єднати знаком диз'юнкції.

Досконалою кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ) логічної функції називають такий її вираз, який містить елементарні диз'юнкції одного рангу, пов’язані кон’юнкцією. Правила утворення ДКНФ функції *n* аргументів такі:

1. За кожним набором двійкових змінних, за яких функція набуває значення 0, скласти елементарні диз’юнкції (макстерми).
2. В елементарні диз’юнкції записати неінвертованими змінні, що задані нулем в таблиці істинності, а інвертованими – ті змінні, які в таблиці істинності задані одиницею. Здобутий результат називають конституентами нуля.
3. Елементарні диз’юнкції об’єднати знаком кон’юнкції.

ДКНФ використовують рідше за ДДНФ у процесі перетворення логічних виразів.

Мінімізація булевих функцій методом Карно-Вейча

Логічну схему, що реалізує заданий алгоритм перетворення сигналів, можна синтезувати безпосередньо за виразом, поданим у вигляді ДДНФ або ДКНФ. Проте отримана при цьому схема, як правило, не оптимальна з погляду її практичної реалізації. Тому скінченну логічну функцію звичайно мінімізують.

Метою мінімізації логічної функції є зменшення вартості її технічної реалізації. Критерій, відповідно до якого виконують мінімізацію, далеко не однозначний і залежить як від типу задачі, так і рівня розвитку технології.

Основними вимогами до задачі синтезу є: мінімальне число елементарних кон’юнкцій або диз’юнкцій у логічній формулі й однорідність використовуваних операцій.

Для мінімізації функцій з числом аргументів $n \le 6$ застосовують карти Карно. Їх будують у вигляді таблиць з 2^n клітин із розміткою рядків і стовпчиків змінними.

Карти Карно – це графічне зображення таблиць істинності. Карта Карно показана на рисунку 1.2. Чотири квадрати (1, 2, 3, 4) відповідають чотирьом можливим комбінаціям аргументів ***a*** і ***b*** у таблиці істинності з двома змінними.

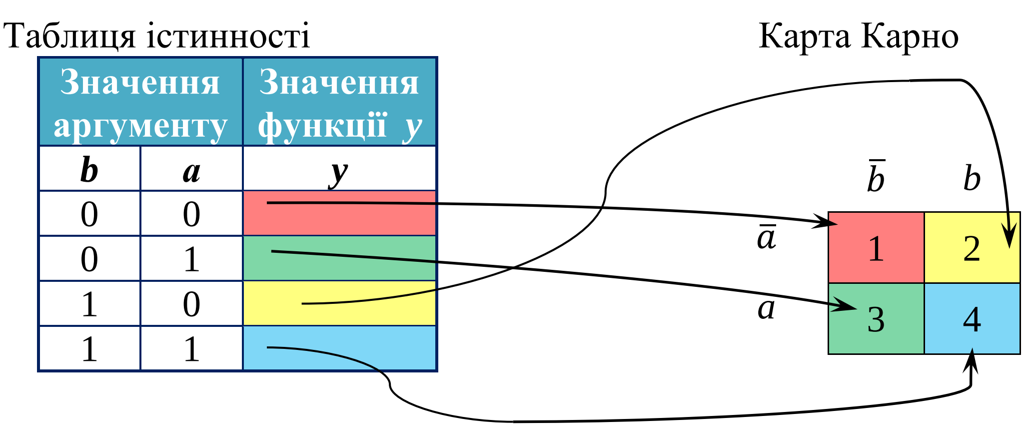


Рисунок 1.2 – Карта Карно

Карти Карно для функції трьох змінних $F(x_1, x_2, x_3)$ показані на рисунку 1.3.

x_1 \ x_2, x_3	00	01	11	10
0	000	001	011	010
1	100	101	111	110

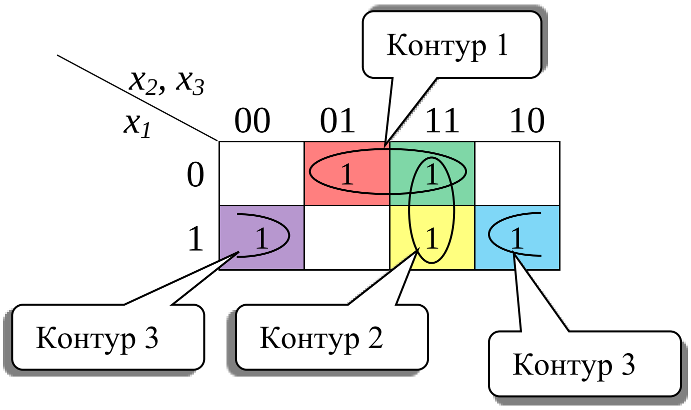
	$\overline{x_2}\cdot\overline{x_3}$	$\overline{x_2}\cdot x_3$	$x_2\cdot x_3$	$x_2\cdot\overline{x_3}$
$\overline{x_1}$	000	001	011	010
x_1	100	101	111	110

а

x_1 \ x_2, x_3	00	01	11	10
0	$\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3}$	$\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3$	$\overline{x_1}\cdot x_2\cdot x_3$	$\overline{x_1}\cdot x_2\cdot\overline{x_3}$
1	$x_1\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3}$	$x_1\cdot\overline{x_2}\cdot x_3$	$x_1\cdot x_2\cdot x_3$	$x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_3}$

б

Значення аргументу			Значення функції *F*
x_1	x_2	x_3	
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1



в

Рисунок 1.3 – Карти Карно для функції трьох змінних $F(x_1, x_2, x_3)$

Рядки карти відмічені значеннями змінної x_1, а стовпчики – значеннями змінних x_2, x_3. Кожна клітина карти Карно відповідає одному набору таблиці істинності для функції трьох змінних (дивись рисунок 1.3, *а*) або мінтермам цієї функції (дивись рисунок 1.3, *б*).

При мінімізації у кожну клітину карти Карно записують значення функції (0 або 1) для певної комбінації початкових змінних. На рисунку 1.3, *в* показане заповнення карти Карно для функції, заданої таблицею істинності. Тут для кожного мінтерма, що входить у ДДНФ функції, ставиться одиниця, а інші клітини не заповнюються.

Мінтерми у сусідніх клітинах карти Карно у рядку (включаючи верхні та нижні) або стовпчику (включаючи крайні) відрізняються значенням однієї змінної, що дозволяє виконати операцію склеювання за цією змінною.

Наприклад, на рисунку 1.3, *в* мінтерми ($\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3$) і ($\overline{x_1}\cdot x_2\cdot x_3$) (клітини контура 1) відрізняються значенням змінної x_2, тому вони склеюються за нею і представляються кон'юнкцією двох змінних ($\overline{x_1}\cdot x_3$). Аналогічно виконуємо операцію склеювання для мінтермів контурів 2 і 3. В результаті мінімізації функції $F(x_1, x_2, x_3)$ отримуємо її мінімальний вираз:

$$F(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} \cdot x_3 \vee x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot \overline{x_3} .$$

Розмітка карт Карно для функцій чотирьох змінних показана на рисунку 1.4.

x_1, x_2 \ x_3, x_4	00	01	11	10
00	0000	0001	0011	0010
01	0100	0101	0111	0110
11	1100	1101	1111	1110
10	1000	1001	1011	1010

а

	$\overline{x_3} \cdot \overline{x_4}$	$\overline{x_3} \cdot x_4$	$x_3 \cdot x_4$	$x_3 \cdot \overline{x_4}$
$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$	0000	0001	0011	0010
$\overline{x_1} \cdot x_2$	0100	0101	0111	0110
$x_1 \cdot x_2$	1100	1101	1111	1110
$x_1 \cdot \overline{x_2}$	1000	1001	1011	1010

б

x_1, x_2 \ x_3, x_4	00	01	11	10
00	$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4}$	$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4$	$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4$	$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}$
01	$\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4}$	$\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4$	$\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$	$\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}$
11	$x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4}$	$x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4$	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$	$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}$
10	$x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4}$	$x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4$	$x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4$	$x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}$

в

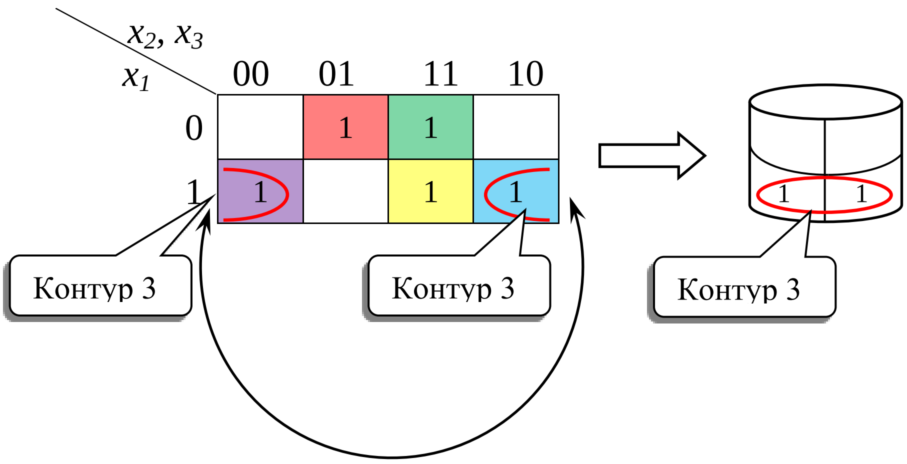
Рисунок 1.4 – Карти Карно для функції чотирьох змінних $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$:
а, б – двійкове значення мінтермів; *в* – мінтерми функції

Властивості карти Карно такі:

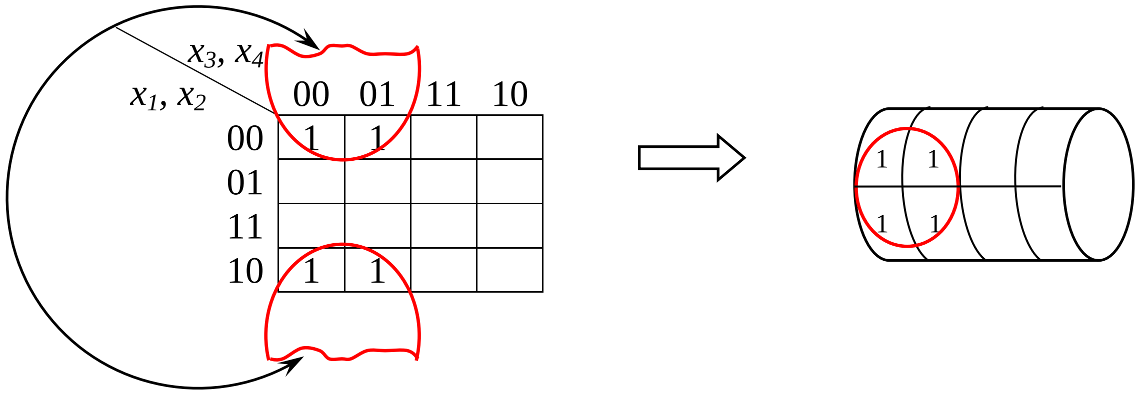
1. Комбінації значень змінних для сусідніх клітин карти Карно відрізняються значенням лише однієї змінної. У разі переходу з однієї клітини в сусідню завжди змінюється значення лише однієї змінної від свого прямого значення до його інверсії й навпаки.

2. Сусідніми між собою є крайні ліві клітини карти Карно з крайніми правими і крайні верхні клітини карти з крайніми нижніми (ніби карти були згорнуті в циліндри по вертикалі (рисунок 1.5, *а*) і горизонталі, як показано на рисунку 1.5, *б*).

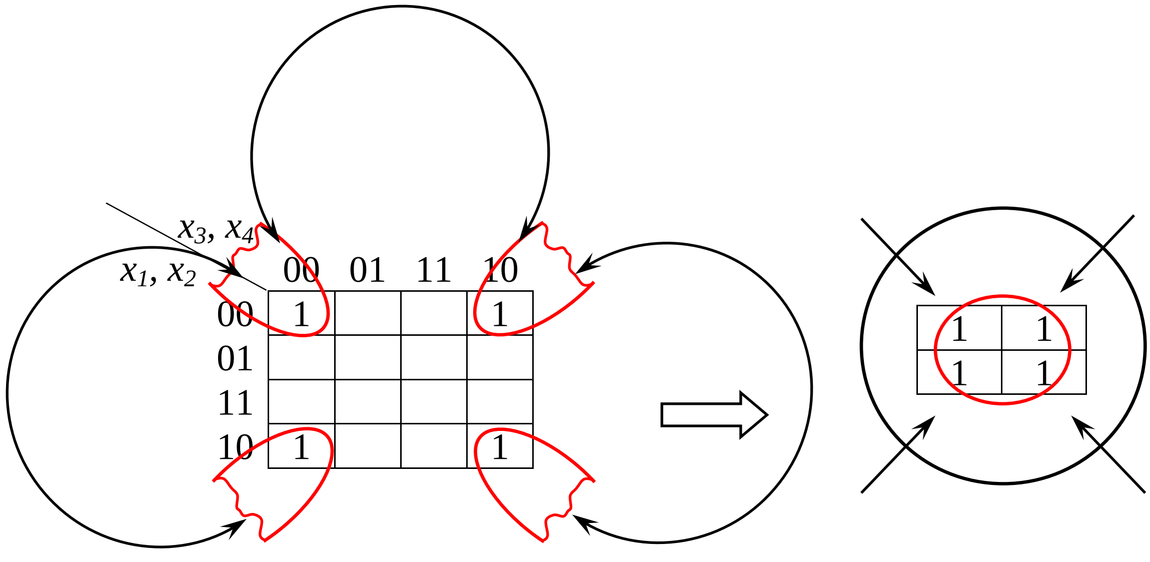
На рисунку 1.5, *в* показаний ще один спосіб утворення контурів. Чотири кутових клітини карти Карно тут розглядаються як пов’язані один з одним у результаті згортання карти в шар. При цьому чотири кутових клітини є сусідніми і, відповідно, можуть бути об’єднані одним контуром. Спрощений булевий вираз має вигляд $y = \overline{x_2} \cdot \overline{x_4}$.



а



б



в

Рисунок 1.5 – Згортання карти Карно

Усі клітини, що відрізняються значенням тільки однієї змінної, є сусідніми, незважаючи на те, що іноді вони розміщені не поряд (для функцій п'яти змінних і більше).

Для деякої логічної функції, заданої за допомогою карти Карно, можна записати кілька алгебраїчних виразів різної складності в диз'юнктивній або кон'юнктивній формі.

При цьому потрібно дотримуватись таких правил:

1. Усі одиниці (при записі функції у диз'юнктивній формі) і всі нулі (при записі у кон'юнктивній формі) мають бути замкнені в прямокутні контури. Одиничні контури можуть об'єднувати кілька одиниць, але не повинні містити усередині себе нулів. Нульові контури можуть об'єднувати кілька нулів, але не повинні містити усередині себе одиниць. Однойменні контури можуть накладатися один на одного, тобто та сама одиниця (або нуль) може входити в кілька одиничних (нульових) контурів.
2. Число клітин у контурі дорівнює 2^n, де $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$, тобто число клітин виражається числами 1, 2, 4, 8, 16, 32, … .
3. Щоб уникнути отримання зайвих контурів, їх побудову потрібно починати з тих одиниць (нулів), що можуть увійти в один єдиний контур. *Зайвими* називають контури, всі клітини яких увійшли вже в інші контури.
4. У контури можна об'єднувати тільки сусідні клітини, що містять одиниці або нулі.
5. Вираз логічної функції можна записати за відповідною картою Карно в диз'юнктивній або кон'юнктивній формах. Диз'юнктивна форма складається у вигляді диз'юнкції кон'юнкцій, що відповідають одиничним контурам, виділеним на карті для визначення функції; кон'юнктивна – у вигляді кон'юнкції диз'юнкцій, що відповідають нульовим контурам.
6. Для контурів, що охоплюють різну кількість клітин, утворюються вирази різної складності. Тому для певної логічної функції можна записати за її картою Карно кілька алгебраїчних виразів, що відрізняються за складністю. Найскладніший вираз відповідає випадку, коли кожній клітині відповідає свій контур. Цей вираз є ДДНФ або ДКНФ певної функції.

Для отримання за картою Карно мінімального виразу логічної функції слід дотримуватися такого правила (крім загальних, викладених раніше): одиниці або нулі мають об'єднуватись мінімальним числом найбільших контурів.

Для мінімізації булевих функцій використовують також *діаграми Вейча*, які аналогічні картам Карно і відрізняються від них способом розмічання: замість символів 0 і 1 використовують булеві позначення аргументів – X_1, X_2 та ін. (дивись рисунок 1.6).

	x_2	x_2		
x_1	110	111	101	100
	010	011	001	000
		x_3	x_3	

а

	x_2	x_2			
x_1	1100	1101	1001	1000	
x_1	1110	1111	1011	1010	x_3
	0110	0111	0011	0010	x_3
	0100	0101	0001	0000	
		x_4	x_4		

б

Рисунок 1.6 – Діаграми Вейча:
а - для функції трьох змінних; *б* - для функції чотирьох змінних

Початкові змінні розміщують по зовнішніх сторонах карти навпроти її рядків і стовпчиків. При цьому значення кожної із початкових змінних належить до всього рядка або стовпчика і дорівнює 1, якщо напроти рядка (стовпчика) стоїть позначення цієї змінної; для інших рядків (стовпчиків) значення цієї змінної дорівнює 0.

Практична частина

Приклад 1. Формалізувати та записати у вигляді булевих функцій висловлювання: «лампочка охоронної сигналізації світиться, коли всі троє дверей приміщення зачинені».

Розв'язування. Позначимо логічні змінні x_1, x_2, x_3 істинними, якщо відповідні двері зачинені. В такому випадку істинне значення функції («лампочка охоронної сигналізації світиться») визначається за формулою: $y_2 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$.

Відповідь: $y_2 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$.

Приклад 2. Які з наступних речень є висловлюваннями:

a) Київ – столиця України;
b) Трикутник ABC подібний трикутнику A'B'C';
c) У романі А.С. Пушкіна «Евгений Онегин» 136245 букв;
d) Луна є супутником Марса.

Розв'язування. Речення b) не є висловлюванням: ми не можемо визначити, істинне воно або помилкове, тому що не знаємо, про які саме трикутники іде мова.

Відповідь: а), с), d).

Приклад 3. Нехай таблицею істинності задана функція $F(x_2, x_1, x_0)$ (дивись таблицю 1.21). Утворіть її ДДНФ і ДКНФ.

Розв'язування.

Таблиця 1.21 – Таблиця істинності функції $F(x_2, x_1, x_0)$

Значення аргументу			**Значення функції *F***	**ДДНФ**	**ДКНФ**
x_2	x_1	x_0		**мінтерм**	**макстерм**
0	0	0	0	-	$x_2 + x_1 + x_0$
0	0	1	1	$\overline{x_2} \cdot \overline{x_1} \cdot x_0$	-
0	1	0	1	$\overline{x_2} \cdot x_1 \cdot \overline{x_0}$	-
0	1	1	0	-	$x_2 + \overline{x_1} + \overline{x_0}$
1	0	0	1	$x_2 \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_0}$	-
1	0	1	0	-	$\overline{x_2} + x_1 + \overline{x_0}$
1	1	0	0	-	$\overline{x_2} + \overline{x_1} + x_0$
1	1	1	1	$x_2 \cdot x_1 \cdot x_0$	-

За таблицею істинності знаходимо, що функція *F* набуває значення 1 при чотирьох наборах аргументів, тому функція *F* у ДДНФ складатиметься з логічної суми чотирьох мінтермів:

$$F(x_2, x_1, x_0) = \overline{x_2} \cdot \overline{x_1} \cdot x_0 + \overline{x_2} \cdot x_1 \cdot \overline{x_0} + x_2 \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_0} + x_2 \cdot x_1 \cdot x_0.$$

Функція $F(x_2, x_1, x_0)$ у ДКНФ набуває значення 0 при чотирьох наборах аргументів і складатиметься з логічного сполучення чотирьох макстермів:

$$F(x_2, x_1, x_0) = (x_2 + x_1 + x_0)\,(x_2 + \overline{x_1} + \overline{x_0})\,(\overline{x_2} + x_1 + \overline{x_0})(\overline{x_2} + \overline{x_1} + x_0).$$

Відповідь: $F(x_2, x_1, x_0) = \overline{x_2} \cdot \overline{x_1} \cdot x_0 + \overline{x_2} \cdot x_1 \cdot \overline{x_0} + x_2 \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_0} + x_2 \cdot x_1 \cdot x_0;$
$F(x_2, x_1, x_0) = (x_2 + x_1 + x_0)\,(x_2 + \overline{x_1} + \overline{x_0})\,(\overline{x_2} + x_1 + \overline{x_0})(\overline{x_2} + \overline{x_1} + x_0).$

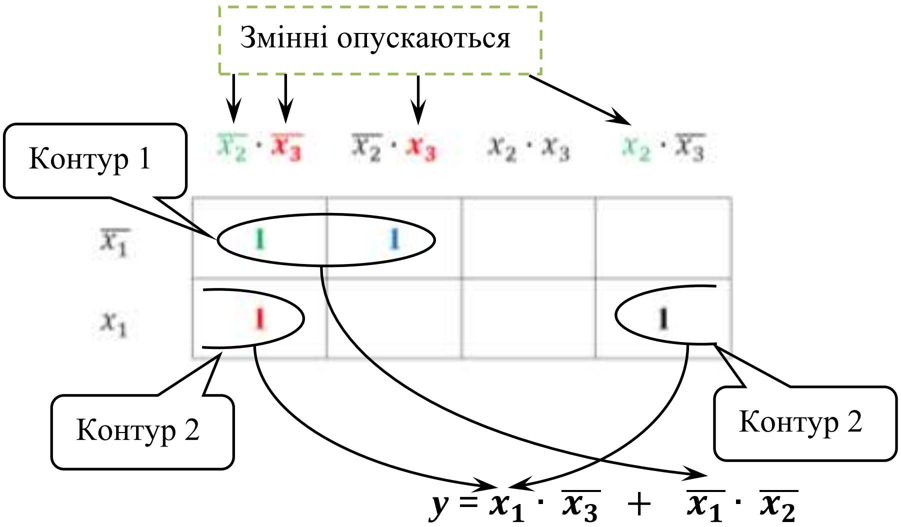
Приклад 4. Виконайте мінімізацію булевого виразу за допомогою карти Карно:
$y = x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}$.

Розв'язування. Відповідно до заданого булевого виразу складаємо карту Карно:

$$\boldsymbol{y = x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}}$$

	$\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$	$\overline{x_2} \cdot x_3$	$x_2 \cdot x_3$	$x_2 \cdot \overline{x_3}$
$\overline{x_1}$	**1**	**1**		
x_1	**1**			**1**

Об’єднуємо контурами групи одиниць і виконуємо операцію склеювання:



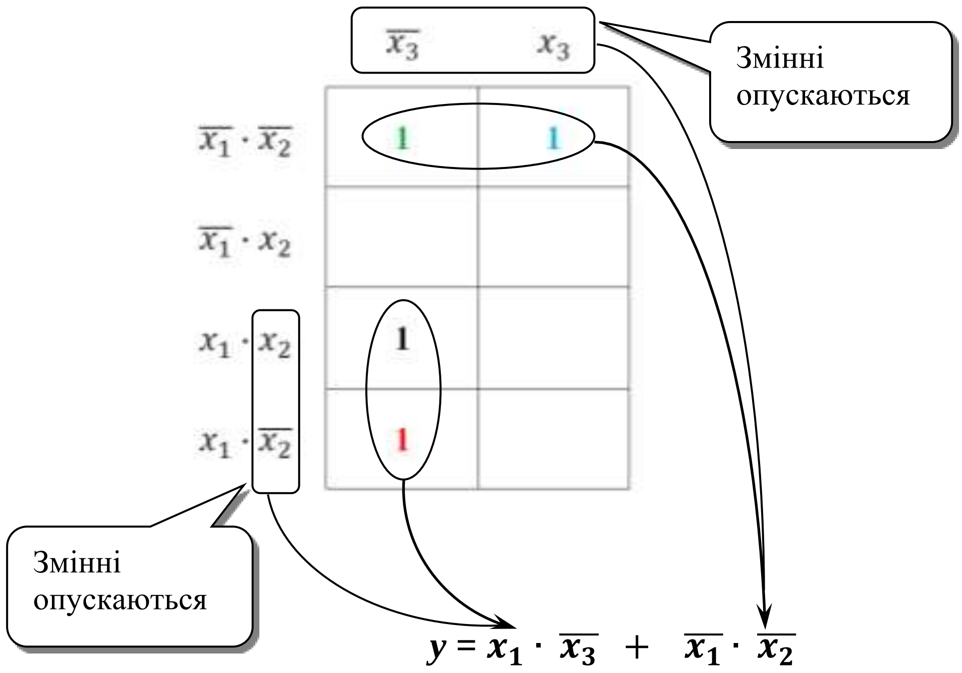
Мінтерми ($\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3}$) і ($\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3$) (клітини контура 1) відрізняються значенням змінної x_3, тому вони склеюються за нею і представляються кон’юнкцією двох змінних ($\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}$). Аналогічно виконуємо операцію склеювання для мінтермів контура 2. В результаті мінімізації функції y отримуємо її мінімальний вираз: $y = x_1\cdot\overline{x_3} + \overline{x_1}\cdot\overline{x_2}$.

Ще один варіант карти Карно відповідно до заданого булевого виразу:

$$\boldsymbol{y = x_1\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3} + \overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3} + \overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3 + x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_3}}$$

	$\overline{x_3}$	x_3
$\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}$	**1**	**1**
$\overline{x_1}\cdot x_2$		
$x_1\cdot x_2$	**1**	
$x_1\cdot\overline{x_2}$	**1**	

Об’єднуємо контурами групи одиниць і виконуємо операцію склеювання:



Отже, спрощений вираз: $y = x_1\cdot\overline{x_3} + \overline{x_1}\cdot\overline{x_2}$

Як бачимо, у двох варіантах побудови карти Карно спрощений вираз співпадає.

Істотно, щоб карта Карно була складена одним з показаних вище способів. Якщо карту Карно скласти невірно, вона не буде давати потрібного ефекту спрощення.

Відповідь: $y = x_1\cdot\overline{x_3} + \overline{x_1}\cdot\overline{x_2}$

Приклад 5. Виконайте мінімізацію булевого виразу за допомогою карти Карно:

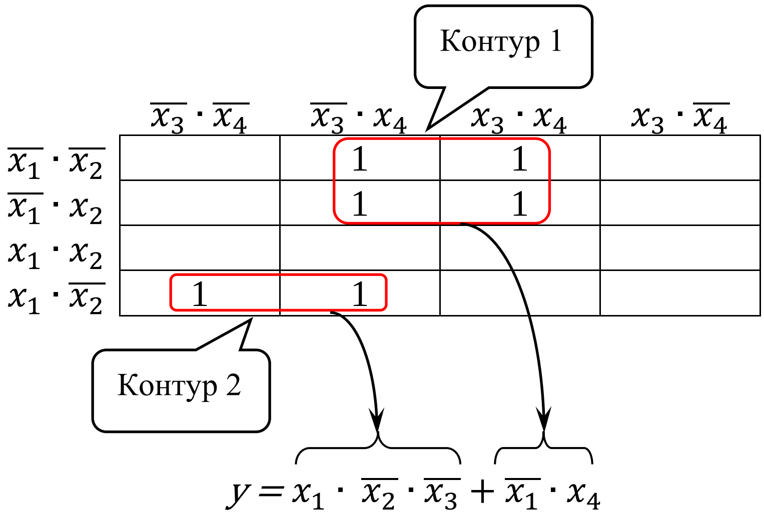
$$y = x_1\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3}\cdot\overline{x_4} + \overline{x_1}\cdot x_2\cdot\overline{x_3}\cdot x_4 + \overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3}\cdot x_4 + \overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3\cdot x_4 + \\ + \overline{x_1}\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4 + x_1\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3}\cdot x_4$$

Розв'язування. Відповідно до заданого булевого виразу складаємо карту Карно:

$$y = \underbrace{x_1\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3}\cdot\overline{x_4}} + \underbrace{\overline{x_1}\cdot x_2\cdot\overline{x_3}\cdot x_4} + \underbrace{\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3}\cdot x_4} + \underbrace{\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3\cdot x_4} + \underbrace{\overline{x_1}\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4} + \underbrace{x_1\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3}\cdot x_4}$$

	$\overline{x_3}\cdot\overline{x_4}$	$\overline{x_3}\cdot x_4$	$x_3\cdot x_4$	$x_3\cdot\overline{x_4}$
$\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}$		1	1	
$\overline{x_1}\cdot x_2$		1	1	
$x_1\cdot x_2$				
$x_1\cdot\overline{x_2}$	1	1		

Об’єднуємо контурами групи одиниць і виконуємо операцію склеювання:



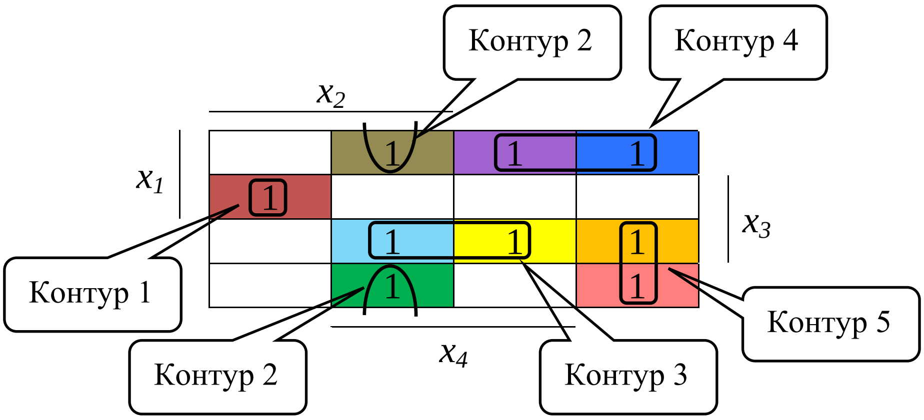
Контур 2 дає можливість опустити змінні $\overline{x_4}$ і x_4. Після цього у ньому залишається кон’юнкція $(x_1\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3})$. Далі у контурі 1 попарно опускаються $\overline{x_2}$ і x_2, $\overline{x_3}$ і x_3. В результаті цього контур 1 дає кон’юнкцію $(\overline{x_1}\cdot x_4)$. Далі кон’юнкції $(x_1\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3})$ і $(\overline{x_1}\cdot x_4)$ об’єднуємо диз’юнкцією і отримаємо мінімізований вираз у ДНФ: $y = x_1\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3} + \overline{x_1}\cdot x_4$.

Відповідь: $y = x_1\cdot\overline{x_2}\cdot\overline{x_3} + \overline{x_1}\cdot x_4$.

Приклад 6. Мінімізуйте за допомогою діаграми Вейча функцію, задану таблицею істинності:

Значення аргументу				**Значення функції *F***
x_1	x_2	x_3	x_4	
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

Розв'язування. Складаємо діаграму Вейча відповідно до таблиці істинності. Далі об'єднуємо контурами групи одиниць і виконуємо операцію склеювання:



Контур 1 дає кон'юнкцію $(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4})$. Контур 2 дає можливість опустити змінну x_1. Після цього у ньому залишається кон'юнкція $(x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4)$. Далі у контурі 3 опускається змінна x_2. В результаті цього контур 3 дає кон'юнкцію $(\overline{x_1} \cdot x_3 \cdot x_4)$. У контурі 4 опускається змінна x_4. В результаті цього контур 4 дає кон'юнкцію $(x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3})$. У контурі 5 опускається змінна x_3. В результаті цього контур 5 дає кон'юнкцію $(\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_4})$.

Далі кон'юнкції $(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4})$, $(x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4)$, $(\overline{x_1} \cdot x_3 \cdot x_4)$, $(x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3})$ і $(\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_4})$ об'єднуємо диз'юнкцією і отримаємо мінімізований вираз у ДНФ: $y = (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}) + (x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4) + (\overline{x_1} \cdot x_3 \cdot x_4) + (x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) + (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_4})$.

Відповідь: $y = (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}) + (x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4) + (\overline{x_1} \cdot x_3 \cdot x_4) + (x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) + (\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_4})$.

Задачі для самостійної підготовки

1. Формалізувати та записати у вигляді булевих функцій висловлювання: «температурна сигналізація вмикається, коли хоча б один із двох датчиків зафіксує температуру 70°».

2. Які з наступних речень є висловлюваннями:
   a) Мікропроцесорні пристрої – цікава дисципліна;
   b) Каша – смачна страва;
   c) Я живу у місті Нова Каховка;
   d) Студент спеціальності «Обслуговування інтелектуальних інтегрованих систем».

3. Вкажіть, які із висловлювань попередньої задачі істинні, а які помилкові.

4. Нехай таблицею істинності задана функція $F(x_1, x_0)$ (дивись таблицю 1.22). Утворіть її ДДНФ і ДКНФ.

Таблиця 1.22 – Таблиця істинності функції $F(x_1, x_0)$

Значення аргументу		**Значення функції *F***
x_1	x_0	
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

5. Складіть таблицю істинності для булевого виразу $y = x_1x_2\overline{x_3} + x_1\overline{x_2}x_3$.

6. Функцію, що подана у формі карти Карно, зобразити у табличній та аналітичній формах запису.

x_1, x_2 \ x_3, x_4	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	1	0
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

7. Виконайте мінімізацію булевого виразу за допомогою карти Карно:
$y = \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$.

8. Виконайте мінімізацію булевого виразу за допомогою карти Карно:
$y = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$.

9. Мінімізуйте за допомогою карт Карно функцію, задану таблицею:

Значення аргументу			**Значення функції *F***
x_1	x_2	x_3	
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

10. Виконайте мінімізацію булевого виразу за допомогою карти Карно:
$y = \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}$.

11. Виконайте мінімізацію булевого виразу за допомогою карти Карно:
$y = \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4 + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4.$

12. Мінімізуйте за допомогою карт Карно функцію, задану таблицею:

Значення аргументу				**Значення функції *F***
x_1	x_2	x_3	x_4	
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

13. Виконайте мінімізацію булевого виразу із завдання №10 за допомогою діаграми Вейча.
14. Мінімізуйте функцію із завдання №12 за допомогою діаграми Вейча.