ЛОГІЧНІ ОСНОВИ ЦИФРОВИХ ПРИСТРОЇВ.

Булева алгебра

У практиці інженерної діяльності часто трапляються ситуації, за яких має значення не рівень сигналів, що надходять з відповідних датчиків, а лише наявність чи відсутність таких сигналів. Наприклад, у системах охоронної сигналізації необхідно знати, зачинені чи не зачинені двері або вікна у приміщенні, що охороняється. У системах автоматики часто необхідно знати, чи не перевищує кількість рідини в цистерні заданий рівень, чи не є тиск у котлі нижчим від визначеної межі, чи не перевищує температура у приміщенні задану величину тощо.

Схеми, які дозволяють розв'язувати поставлені завдання, можуть описуватись виразами типу: «лампочка на пульті охоронної сигналізації світиться, якщо всі вікна зачинені (точніше, зачинено перше **і** друге **і** третє **і** … вікно)». Або «лампочка не світиться, якщо хоча б одне вікно відчинене (тобто може бути відчиненим перше **або** друге **або** третє **або** перше **і** друге **або** …)». Такі вирази називаються *логічними*.

Під час проектування таких систем задають відповідний рівень напруги живлення, і наявність чи відсутність її дає можливість одержувати відповіді на поставлені питання. Припускають, що високий рівень напруги – це «1», низький – відповідно, «0». У такому разі наведені вище вирази можуть бути формалізовані: якщо контакти, що фіксують положення вікон, позначити як аргументи x_1, x_2, … , x_n, які можуть набувати лише значення «1» або «0», то напругу на лампочці можемо розглядати як функцію y, яка теж набуває одного з двох аналогічних значень.

Математичний апарат, що оперує з аргументами та функціями, які набувають тільки двох значень – «1» та «0» – називається *двійковою (булевою) алгеброю*, або *алгеброю логіки*. Вона є теоретичною основою побудови ЕОМ і цифрових пристроїв. Такий математичний апарат для розв'язання задач формальної логіки розробив англійський математик XIX ст. Дж. Буль.

Апарат булевої алгебри розповсюджується на об'єкти самої різної природи без відношення до їх суті. Головне, щоб вони характеризувалися двома значеннями або станами: контакт включений або виключений, наявність високого або низького рівня електричної напруги, виконання або невиконання деякої умови роботи тощо.

Використання апарату алгебри логіки у комп'ютерній техніці базується на тому, що цифрові елементи характеризуються двома станами і завдяки цьому можуть бути описані булевими функціями. Стандарт ДСТУ 2533-94 «Арифметичні і логічні операції. Терміни і визначення» конкретизував основні поняття булевої алгебри у системах обробки інформації.

Базою алгебри логіки є поняття про висловлювання (логічний аргумент), істинність і помилковість висловлювання, а також поняття про зв'язки між висловлюваннями. *Висловлювання* - це будь-яке речення, яке являє собою таке твердження, про яке можна судити, істинне воно або помилкове. Значення висловлювання може змінюватися зі зміною обставин, тому висловлювання змінює оцінку своєї істинності. Наприклад, висловлювання «сьогодні вівторок» є істинним у вівторок і помилковим у середу.

З точки зору логіки висловлювання можуть бути:

- постійно істинними (математично їх беруть такими, що дорівнюють 1);
- постійно помилковими (математично їх беруть такими, що дорівнюють 0);
- істинними або помилковими залежно від певних умов, тобто набувати значення 1 або 0 навперемінно.

Різні комбінації значень вхідних змінних у логічних функціях називають *наборами*. Функція є цілком заданою, якщо вказані її значення для всіх наборів значень вхідних змінних. Якщо задати кожному набору значення функції, яке дорівнює 0 або 1, можна дістати табличне завдання певної функції, що називають *таблицею істинності* або *таблицею відповідності*.

Усі можливі логічні функції n змінних можна створити за допомогою трьох основних операцій:

- *логічне заперечення* (інверсія, операція НІ) – це такий зв'язок між аргументом x та функцією y, за якого y істинна тоді і тільки тоді, коли значення x помилкове, і навпаки;
- *логічне додавання* (диз'юнкція, операція АБО) декількох змінних – це така функція, яка помилкова тоді і тільки тоді, коли одночасно помилкові всі змінні, що додаються.
- *логічне множення* (кон'юнкція, операція І) декількох змінних – це така функція, яка істинна тоді і тільки тоді, коли одночасно істинні всі логічні змінні.

Основні закони і тотожності алгебри логіки. Для булевих операцій заперечення, диз'юнкції і кон'юнкції справедливі наступні закони, властивості і тотожності:

1. Закони нульової множини:

   $0 \cdot a = 0,$
   $0 + a = a,$
   $0 \cdot adc \ldots z = 0.$

2. Закони універсальної множини:

   $1 \cdot a = a,$
   $1 + a = 1,$
   $1 + a + b + \ldots + z = 1.$

3. Закони ідемпотентності (повторення, тавтології):

   $aa \ldots a = a,$
   $a + a + \ldots + a = a.$

4. Закони подвійної інверсії:

   $\bar{\bar{a}} = a.$

5. Закони доповняльності:

   а) логічне протиріччя:

$a\bar{a} = 0,$

б) закон виключеного третього:

$a + \bar{a} = 1.$

6. Комутативний (переставний) закон:

$ab = ba,$

$a+b = b+a.$

7. Асоціативні (сполучні) закони:

$a(bc) = (ab)c = abc,$

$a+(b+c) = (a+b)+c = a+b+c.$

8. Дистрибутивні (розподільні) закони:

$a(b+c) = ab+ac,$

$a+bc = (a+b)(a+c).$

9. Закони поглинання:

$a(a+b) = a,$

$a(a+b)(a+c)\ldots(a+w) = a,$

$a+ab = a,$

$a+ab+ac+\ldots+aw = a,$

$a(\bar{a}+b) = ab,$

$a+\bar{a}b = a+b.$

10. Закони склеювання (поширення):

$ab + a\bar{b} = a,$

$(a + b)\left(a + \bar{b}\right) = a.$

11. Закони узагальненого склеювання:

$ab + \bar{a}c + bc = ab + \bar{a}c,$

$(a + b)(\bar{a} + c)(b + c) = (a + b)(\bar{a} + c),$

$(a + b)(\bar{a} + c) = ac + \bar{a}b.$

12. Закони де Моргана (закони інверсії):

а) для двох змінних:

$\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b},$

$\overline{a + b} = \bar{a}\bar{b},$

б) для *n* змінних:

$\overline{abc\ldots w} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \ldots + \bar{w},$

$$\overline{a+b+c\ldots+w}=\bar{a}\bar{b}\bar{c}\ldots\bar{w}.$$

Назва, позначення і значення всіх шістнадцяти булевих функцій для двозначної системи двох змінних наведено у таблиці 1.20.

Таблиця 1.20 – Значення булевих функцій

№ пор.	Значення булевих функцій залежно від аргументів x та y					Позначення функції	Назва функції	Назва або позначення схеми логічного елемента
	x	0	0	1	1			
	y	0	1	0	1			
1	$F_0(x, y)$	0	0	0	0	0	Константа нуль	Генератор нуля
2	$F_1(x, y)$	0	0	0	1	$x \wedge y$ xy	Кон'юнкція, логічне множення, І	Кон'юнктор, І, &
3	$F_2(x, y)$	0	0	1	0	$x \Delta y$	Заборона за x, заперечення імплікації	Схема заборони
4	$F_3(x, y)$	0	0	1	1	x	Змінна x	Повторювач x
5	$F_4(x, y)$	0	1	0	0	$y \Delta x$	Заборона за y, заперечення імплікації	Схема заборони
6	$F_5(x, y)$	0	1	0	1	y	Змінна y	Повторювач y
7	$F_6(x, y)$	0	1	1	0	$x \oplus y$	Сума за модулем 2, логічна нерівнозначність	Додавання за модулем 2, М2
8	$F_7(x, y)$	0	1	1	1	$x \vee y$ $x + y$	Диз'юнкція, логічне додавання, АБО	Диз'юнктор, АБО
9	$F_8(x, y)$	1	0	0	0	$x \downarrow y$ $x \vee y$	Стрілка Пірса, заперечення диз'юнкції	Елемент Пірса, АБО – НЕ
10	$F_9(x, y)$	1	0	0	1	$x \equiv y$	Еквівалентність	Рівнозначність
11	$F_{10}(x, y)$	1	0	1	0	y	Заперечення, інверсія y	Інвертор НЕ
12	$F_{11}(x, y)$	1	0	1	1	$y \to x$	Імплікація від y до x	Елемент імплікації
13	$F_{12}(x, y)$	1	1	0	0	$-x$	Заперечення, інверсія x	Інвертор НЕ
14	$F_{13}(x, y)$	1	1	0	1	$x \to y$	Імплікація від x до y	Елемент імплікації
15	$F_{14}(x, y)$	1	1	1	0	x/y	Штрих Шеффера, заперечення кон'юнкції	Елемент Шеффера, І – НЕ
16	$F_{15}(x, y)$	1	1	1	1	1	Константа 1	Генератор одиниці

Аналітичне представлення булевих функцій

Для опису функцій алгебри логіки використовують різні способи. Основними з них є опис функцій у словесній формі, у вигляді таблиць істинності, алгебраїчних виразів, послідовностей десяткових чисел, а також кубічних комплексів.

Розглянемо опис функцій алгебри логіки у вигляді алгебраїчного виразу.

Алгебра логіки дає змогу створювати складні функції, аргументи яких є функціями інших двійкових аргументів. За допомогою *суперпозицій*, тобто підстановки у логічні формули замість змінних деяких інших булевих виразів, можна отримати більш складні функції будь-якої кількості змінних, наприклад:

$$y = x_1 \vee x_2;\ \ x_1 = z_1z_2;\ x_2 = z_3 \vee z_4, \text{ тоді } y = z_1z_2 \vee z_3 \vee z_4$$

Багаторазове використання принципу суперпозиції дає можливість дістати функції бажаного числа аргументів.

Елементарна кон'юнкція утворюється кон'юнкцією скінченної множини логічних змінних та їх заперечень. Наприклад, $P(x, y, z) = xy\bar{z}$.

Елементарна диз'юнкція утворюється диз'юнкцією скінченної множини логічних змінних та їх заперечень. Наприклад, $P(x, y, z) = x + y + \bar{z}$.

Кількість змінних в елементарній кон'юнкції (диз'юнкції) називається її *довжиною* і визначає її *ранг*. Наприклад, $P(x, y, z, w) = x + y + \bar{z} + w$ є диз'юнкцією четвертого рангу.

Розроблені універсальні (канонічні) форми представлення булевих функцій, які дають можливість отримати аналітичну форму довільної функції безпосередньо із таблиці істинності. Ця форма у подальшому може бути мінімізована або спрощена. Найбільш широке розповсюдження отримали досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ) і досконала кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ). Для отримання цих форм вводяться поняття мінтермів (конституента 1) і макстермів (конституента 0).

Мінтерм – це функція, що набуває одиничного значення тільки при одному з усіх можливих наборів аргументів.

Макстерм – це функція, що набуває нульового значення тільки при одному з усіх можливих наборів аргументів.

Мінтерм алгебраїчно є кон'юнкцією аргументів, а макстерм – диз'юнкцією аргументів.

Якщо використовують двійкову систему числення і число наборів аргументів n, то число мінтермів або макстермів $N = 2^n$.

Диз'юнкцію будь-якого числа елементарних кон'юнкцій називають *диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ).*

Наприклад, $a + bc + \bar{a}bc + a\bar{b}\bar{c}$.

Кон'юнкцію будь-якого числа елементарних диз'юнкцій називають *кон'юнктивною нормальною формою (КНФ).*

Наприклад, $a(a + b)(\bar{b} + c)(\bar{a} + b + \bar{c})$.

Нормальні форми логічних функцій називають *канонічними*. Логічну функцію, задану будь-яким аналітичним виразом, можна безпосередньо перетворити на нормальну диз'юнктивну (або кон'юнктивну) форму.

Якщо до складу логічної формули належать набори елементарних кон'юнкцій однакового рангу, пов'язані диз'юнкцією, то таку форму подання логічної функції називають *досконалою диз'юнктивною нормальною формою (ДДНФ)*. Правила утворення ДДНФ функції n аргументів такі:

1. За кожним набором двійкових змінних, за яких функція набуває значення 1, скласти елементарні кон'юнкції (мінтерми).
2. В елементарну кон'юнкцію записати неінвертованими змінні, що задані одиницею в таблиці істинності, а інвертованими – ті змінні, які в таблиці істинності задані нулем. Здобутий результат називають конституентами одиниці.
3. Елементарні кон'юнкції об'єднати знаком диз'юнкції.

Досконалою кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ) логічної функції називають такий її вираз, який містить елементарні диз'юнкції одного рангу, пов'язані кон'юнкцією. Правила утворення ДКНФ функції *n* аргументів такі:

1. За кожним набором двійкових змінних, за яких функція набуває значення 0, скласти елементарні диз'юнкції (макстерми).
2. В елементарні диз'юнкції записати неінвертованими змінні, що задані нулем в таблиці істинності, а інвертованими – ті змінні, які в таблиці істинності задані одиницею. Здобутий результат називають конституентами нуля.
3. Елементарні диз'юнкції об'єднати знаком кон'юнкції.

ДКНФ використовують рідше за ДДНФ у процесі перетворення логічних виразів.